

Keskusteluaiheita - Discussion papers

No. 314

Tom Berglund* - Laura Vajanne**

KORKOEPÄVARMUUS VALUUTTAOPTIOIDEN HINNOITTELUSSA

* Elinkeinoelämän Tutkimuslaitos

** Suomen Yhdyspankki

This series consists of papers with limited circulation intended to stimulate discussion. The papers must not be referred to or quoted without the authors' permission.

BERGLUND, Tom - VAJANNE, Laura, KORKOEPÄVARMUUS VALUUTTAOPTIOIDEN HINNOITTELUSSA. Helsinki : ETLA, Elinkeinoelämän Tutkimuslaitos, The Research Institute of the Finnish Economy, 1990. 21 s. (Keskusteluaiheita, Discussion Papers, ISSN 0781-6847; no. 314).

TIIVISTELMÄ: Keskeisenä piirteenä valuuttaoptioiden hinnoittelumallien kehityksessä on ollut pyrkimys korkoriskin täsmälliseen huomioonottamiseen mallissa. Seuraavassa tarkastellaan valuuttaoptioiden tunnetuimpia hinnoittelumalleja tästä näkökulmasta.

Valuuttaoption hinnan määrittelevä yksinkertainen perusmalli pohjautuu oletukselle, että sekä koti- että ulkomainen korko ovat vakioita. Option hintaan vaikuttaa siten vain yksi stokastinen muuttuja, valuuttakurssi. Tässä ympäristössä option hinta saadaan ratkaistua soveltamalla Black-Scholes hinnoitteluyhtälöä johdettuna osinkoa tuottavalle vaateelle. Option hinnan taustalla oleva volatilitteetti on pelkästään valuuttakurssin muutoksesta aiheutuvaa.

Seuraavaksi tuodaan mahdollisimman yksinkertaisella tavalla valuuttaoptioiden analyysiin mukaan korkojen epävarmuus olettamalla koti- ja ulkomaisten velkakirjojen hintaprosessin noudattavan stokastista Brownin liikettä valuuttakurssin ohella. Option hintaan vaikuttavat koti- ja ulkomaisten korkojen varianssit ja niiden väliset kovarianssitermit valuuttakurssin varianssin ohella.

Kolmantena vaihtoehtona käsitellään lähestymistapaa, jossa sekä koti- että ulkomaisten korkojen aikarakenne sekä korkojen ja valuuttakurssien välinen riippuvuus otetaan huomioon. Tuloksena saadaan realistisempi, mutta samalla monimutkaisempi malli, jonka soveltaminen käytännössä edellyttää korkojen aikarakenteen kehitystä kuvaavien prosessien parametrien estimointia.

ASIASANAT: Valuuttaoptiot, korkoepävarmuus, korkorakenne

SISÄLLYSLUETTELO

1.	JOHDANTO	1
2.	OPTIOHINNOITTELUN PERUSMALLI	3
3.	GARMANIN JA KOHLHAGENIN MALLI	5
4.	GRABBEN MALLI	9
5.	AMININ JA JARROWIN MALLI	10
5.1.	Taustaa	10
5.2.	Kotimainen korkostrukturi	12
5.3.	Ulkomainen korkostrukturi	13
5.4.	Talouksien välinen linkki	14
5.5.	Option hinnoittelu	14
6.	YHTEENVETO	16
	LÄHTEET	19
	LIITE	21

1. JOHDANTO

Valuuttaoption teoreettisen hinnan johtamisessa lähdetään tavallisesti Blackin ja Scholesin (1973) esittämästä peruslähtökohdasta, joka rakentuu ajatukselle, että optioiden avulla voidaan muodostaa riskitön portfolio. Jos option kohteena olevaa valuuttaa ja asetettuja osto-optioita yhdistetään sopivassa suhteessa, saadaan positio, jonka arvoon valuutan arvon pienet muutokset eivät vaikuta. Koska tällaiseen positioon sijoitettu raha ei ole riskialtis, positio tulisi tuottaa riskittömän koron verran. Riippuen siitä, mitä option kohteena olevan arvopaperin muutoksista oletetaan, option hinta saadaan laskettua eri menetelmin.

Yksinkertaisin oletamus on, että kurssi muuttuu ainoastaan kerran ajanjakson aikana ja että muutos on joko alaspäin tai ylöspäin tietyn prosentien verran. Tämä formulointi johtaa ns. binomiaalimalliin (Cox, Ross ja Rubinstein, 1979). Jos kohteena olevan arvopaperin hinnan muutosten oletetaan seuraavan log-normaalijakaumaa, päädytään Blackin ja Scholesin (1973) johtamaan malliin.

Periaatteessa on myös mahdollista johtaa optiohinnoittelumalli mille tahansa oletetulle kohteen muutosten jakaumalle edellyttäen, että jakauma mahdollistaa riskin eliminoimisen. Mikäli riskin täydellinen eliminointi ei onnistu, systemaattisen riskin eliminointi useimmiten onnistuu. Jos kohteen hinnan muutosten oletetaan seuraavan jotakin monimutkaisempaa jakaumaa, numeeristen menetelmien käyttö on kuitenkin usein välttämättömyys, jotta option hinta saataisiin laskettua.

Keskeisenä piirteenä valuuttaoptioiden hinnoittelumallien kehityksessä on ollut pyrkimys korkoriskin täsmälliseen huomioonottamiseen mallissa. Seuraavassa tarkastellaan valuuttaoptioiden tunnetuimpia hinnoittelumalleja tästä näkökulmasta.

Black-Scholes-mallin pohjalta johdetaan ensinnäkin hinnoittelumalli, jossa sekä kotimainen että ulkomainen korko oletetaan vakioiksi. Kun korko oletetaan positiiviseksi, investoija pitää vieraassa valuutassa olevat saatavat korkoatuottavissa papereissa. Saamiset vieraassa valuutassa voidaan siten rinnastaa finanssivaateeseen, joka tuottaa jatkuva-aikaista osinkoa. Jatkuva-aikaisen osingon mallin on esittänyt yleisessä muodossa Merton (1973) ja esimerkiksi Biger ja Hull (1983) sekä Garman ja Kohlhagen (1983) nojaavat tähän argumenttiin.

Seuraavana esitetään valuuttaoptioiden hinnoittelumalli, joka jo perustuu oletukseen, että korot ovat stokastisia. Lähestymistapa pohjautuu Mertonin (1973) stokastisen koron malliin. Feiger ja Jacquillat (1979) yrittivät ensimmäisenä soveltaa tätä lähestymistapaa valuuttaoptioiden hinnoitteluun, mutta eivät saaneet vielä ratkaistua hinnoitteluyhtälöä. Grabben (1983) sovellus, joka pohjautuu Feigerin ja Jacquillatin työhön, sisältää sen sijaan suljetun muodon ratkaisun eurooppalaisen valuuttaoption hinnoitteluksi.

Näiden perusmallien pohjalta on valuuttaoptioiden teoreettista hinnanmuodostusta kehitetty aktiivisesti. Erityisesti korkojen aikarakenteen sekä korkojen ja valuuttakurssien välisen riippuvuuden huomioon ottaminen on saanut osakseen kasvavaa kiinnostusta. Aminin ja Jarrowin (1989) mallissa, jossa sovelletaan Heathin, Jarrowin ja Mortonin (1989) esittämää korkojen aikarakenne-dynamiikkaa valuuttaoptioiden hinnoitteluun, nämä tekijät on otettu huomioon.

2. OPTIOHINNOITTELUN PERUSMALLI

Yleisin osakeoptioiden hinnoittelun perusmalli on Black-Scholes malli vuodelta 1973. Käytetään seuraavia merkintöjä:

$c(S, t)$	=Eurooppalaisen call-option hinta
$p(S, t)$	=Eurooppalainen put-option hinta
S	=osakkeen kurssi
X	=option sopimushinta
t	=nykyinen aika
T	=option toteutusaika
r	=riskitön korko
σ	=osakkeen hinnan keskihajonta
μ	=osakkeen odotettu tuotto
$N(.)$	=kumulatiivinen normaalijakauma

Oletetaan, että markkinoilla ei ole rajoituksia, riskitön korko on vakio ja osakkeen hinta noudattaa log-normaaliala diffuusio-prosessia

$$(2.1) \quad dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dz$$

jossa dt on ajan muutos ja dz =Wiener-prosessi.

Eurooppalaisen osto-option hinta tässä ympäristössä saadaan ratkaistuksi kaavasta

$$(2.2) \quad c = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

jossa

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Put - call-pariteetin avulla saadaan vastaavasti ratkaistuksi eurooppalaisen myyntioption hinta, joka on

$$(2.3) \quad p = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

Mallin mukaisesti eurooppalaisen osto-option arvo on osakkeen hinnan ja diskontatun toteutushinnan välinen erotus otettuna huomioon se epävarmuus, joka vallitsee osakkeen kurssista option erääntymispäivänä.¹

Tarkastellaan seuraavaksi yhtälön (2.2) osittaisderivaattoja. Tärkein on 'hedge ratio' eli option hinnan muutos osakekurssin muuttuessa (ns. delta).

$$(2.4) \quad \frac{\delta C}{\delta S} = N(d_1) > 0$$

Kun osakkeen kurssi nousee, option arvo nousee.

$$(2.5) \quad \frac{\delta C}{\delta X} = -e^{-r(T-t)}N(d_2) < 0$$

Kun toteutushinta nousee, option arvo laskee.

$$(2.6) \quad \frac{\delta C}{\delta \sigma} = S\sqrt{T-t} N'(d_1) > 0$$

Kun volatilitiitti lisääntyy, option arvo nousee.

$$(2.7) \quad \frac{\delta C}{\delta r} = X(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2) > 0$$

Kun korko nousee, option arvo nousee.

$$(2.8) \quad \frac{\delta C}{\delta t} = -rXe^{-r(T-t)}N(d_2) - SN'(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} < 0$$

Ajan suhteen muutos on negatiivinen. Kun t kasvaa, option jäljellä oleva aika lyhenee, ja ceteris paribus, optio tulee vähemmän arvokkaaksi.

¹ Keskeinen tekijä yhtälön taustalla on, että sekä johdannaisvaateen että itse osakkeen hintaan vaikuttaa sama epävarmuuden lähde, joten ne korreloivat keskenään täydellisesti hyvin lyhyellä aikavälillä. Siten muutosta toisessa vaateessa vastaa täydellisesti muutos toisessa ja koko portfolion arvo on tunnettu varmuudella tämän lyhyen periodin lopussa. Tällöin sijoittajan riskipreferenssit eivät vaikuta portfolion tuottovaatimukseen. Osakkeen odotettu tuotto μ , johon sisältyy riskilisä, supistuu pois hintayhtälöstä.

Valuuttaoptioiden hinnoitteluun liittyy tiettyjä erityispiirteitä verrattuna perinteisten osakeoptioiden hinnoitteluun. Sovellettaessa Black - Scholes mallia on otettava huomioon mm. seuraavat asiat:

1. Black-Scholes mallissa oletetaan, että option hintaan vaikuttaa ainoastaan kotimainen riskitön korko.

Valuuttaoption hintaan, joka määräytyy vaihtoehtoisesta koti- tai ulkomaisesta sijoituksesta, vaikuttaa sen sijaan molempien maiden korko.

2. Black-Scholes mallin perusmuodossa oletetaan, että osakkeelle ei makseta osinkoa option elinaikana.

Valuuttaoption ollessa kyseessä investoija pitää vieraassa valuutassa olevat saamiset korkoatuottavissa arvopapereissa. Nämä voidaan kuitenkin rinnastaa osakkeeseen, joka tuottaa jatkuva-aikaista osinkoa.

3. Valuuttaoptioiden yhteydessä myös oletus korkojen vakioisuudesta (ja riippumattomuudesta) on kriittinen. Black-Scholes malli olettaa, että option hintaan vaikuttaa vain yksi stokastinen tekijä. Korkojen epävarmuuden salliminen tuo malliin mukaan uusia piirteitä.

4. Black-Scholes malli on kehitetty vain eurooppalaisten optioiden hinnoitteluun. Ongelmaksi jää amerikkalaisyypin option hinnoittelu siinä tapauksessa, että option lunastaminen ennen päättymispäivää on kannattavaa.

3. GARMANIN JA KOHLHAGENIN MALLI

Valuuttaoptioiden hinnoittelun kannalta urauurtavan paperin julkaisivat Garman ja Kohlhagenin vuonna 1983.²

² Samanaikaisesti ilmestyivät myös Biger-Hullin (1983) valuuttaoptioiden hinnoittelua käsittelevä artikkeli ja Giddyn (1983) survey valuuttaoptioista. Aikaisemmin Feiger-Jacquillat (1979) olivat käsitelleet valuuttaoptioiden hinnoittelua.

He esittivät eurooppalais-tyyppisen valuuttaoption hinnoittelumallin, joka perustuu Black-Scholes (1973) malliin. Black-Scholes mallista tullaan Garman-Kohlhagen malliin, kun oivalletaan, että valuutan tämän hetkinen arvo ei yleensä ole sama kuin sen arvo erääntymispäivänä nykyhetkeen diskontattuna, kuten osakkeen tapauksessa.

Vastaavasti kuten Black-Scholes mallissa oletetaan, että option kohteena oleva instrumentti, tässä yhteydessä valuutan spot-kurssi (S), noudattaa log-normaalaa diffuusioprosessia:

$$(3.1) \quad dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dz,$$

jossa t on aika, dt ajan muutos ja dz on Wiener-prosessi.

Oletetaan lisäksi, että ainoa stokastinen muuttuja, joka vaikuttaa option hintaan, on valuuttakurssi S . Markkinoilla ei ole rajoituksia ja sekä ulkomainen (r_f) että kotimainen korko (r_d) ovat vakioita.³

Jos valuutan vaihto tapahtuu tänään, vaihdettu summa kasvaa ulkomaisen koron mukaan päättymispäivään saakka. Jos valuutta vaihdetaan vasta option päättymispäivänä, tämä korkotulo jää saamatta. Päättymispäivän valuutan arvo diskontattuna nykyhetkeen on siis pienempi kuin valuutan spot-arvo. G&K:n malli saadaan yksinkertaisesti vähentämällä menetetty korkotuotto valuutan spot-arvosta eli S (osakkeen hinta kaavassa 2.2) korvataan $Se^{-r_f(T-t)}$:llä, ja lopputulos on:

$$(3.2) \quad c = Se^{-r_f(T-t)} N(d_1) - Xe^{-r_d(T-t)} N(d_2)$$

jossa $d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r_d - r_f + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ ja

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

³ Liitteessä on esitetty täydellinen luettelo käytetyistä symboleista.

Garman-Kohlhagenin tulos voidaan nähdä analogisena Mertonin (1973) esittämän jatkuva-aikaisen osingon tapauksen kanssa. Ulkomaisen valuutan omistaja saa "osinkotuloa" vieraassa valuutassa, joka on yhtä suuri kuin riskitön ulkomainen korko r_f .

Yhtälön (3.2) komparatiivis-staattinen tarkastelun tulokset vastaavat Black-Scholes mallin tuloksia. 'Hedge ratio' eli valuuttakurssin muutoksen vaikutus option hintaan on:

$$(3.3) \quad \frac{\delta C}{\delta S} = e^{-r_f(T-t)} N(d_1) > 0$$

Kun valuuttakurssi nousee (kotimaan rahassa ilmaistuna), option arvo nousee.

Uutena vaikutuksena saadaan ulkomaisen koron muutoksen vaikutus option hintaan, joka on negatiivinen:

$$(3.4) \quad \frac{\delta C}{\delta r_f} = - (T-t) e^{-r_f(T-t)} N(d_1) < 0$$

Lisäksi option jäljellä olevan voimassaoloajan vaikutus tulee monimutkaisemmaksi, koska se vaikuttaa sekä molempien korkotekijöiden että epävarmuustekijän kautta:

$$(3.5) \quad \frac{\delta C}{\delta(T-t)} = -r_f e^{-r_f(T-t)} N(d_1) + r_d e^{-r_d(T-t)} XN(d_2) + \frac{e^{-r_d(T-t)}}{2\sqrt{T}} \sigma XN'(d_2)$$

Aikatekijän etumerkki riippuu paitsi korkojen suhteellisesta tasosta myös siitä, kuinka "in the money" optio on, eli S :n arvosta verrattuna X :ään.

Koska negatiivinen aikaderivaatta on mahdollinen eurooppalaisen osto-option tapauksessa, voimme päätellä,

että amerikkalaisen osto-option antama lunastusoikeus ennen päättymispäivää voi nostaa option hintaa verrattuna vastaavaan eurooppalaiseen osto-optioon. Täten eurooppalaisen call-option hinnoittelukaava ei sellaisenaan sovellu amerikkalaiseen valuuttaoptioon.

Hinnoittelukaavaa (3.2) voidaan myös soveltaa käyttämällä spot-kurssin sijasta valuutan termiinikurssia⁴, joka määritellään katetun korkopariteetin avulla eli

$$(3.6) \quad F = Se^{(r_d - r_f)(T-t)}$$

Tällöin yhtälö (3.2) yksinkertaistuu seuraavasti:

$$(3.7) \quad c = e^{-r_d(T-t)} [FN(d_1) - XN(d_2)]$$

$$\text{jossa} \quad d_1 = \frac{\ln(F/X) + (\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Terminikurssin muutoksen vaikutus option hintaan positiivinen eli:

$$(3.8) \quad \frac{\delta c}{\delta F} = e^{-r_d(T-t)} N(d_1) > 0$$

Muut etumerkit vastaavat aiempia tuloksia lukuunottamatta kotimaisen koron vaikutusta, joka on negatiivinen:

$$(3.9) \quad \frac{\delta c}{\delta r_d} = -e^{-r_d(T-t)} (T-t) [FN(d_1) - XN(d_2)] = -(T-t)C < 0$$

Kotimaisen koron nousu vaikuttaa option arvoa alentavasti, kun terminikurssi pysyy vakiona.

Option jäljellä olevan ajan suhteen tulos on vastaava kuin edellä, eli etumerkki on määrittelemätön.

⁴Garman-Kohlhagen mallin yhteydet Blackin (1976) hyödykeoptio-malliin ovat läheiset, kun se johdetaan terminikurssien kautta.

4. GRABBen MALLI

Garman-Kohlhagenin (1983) mallin näkyvimpiä puutteita on oletus, että koti- ja ulkomainen korko pysyvät vakioina. Erään ratkaisun tarjoaa Grabben vuonna 1983 riippumattomasti Garman-Kohlhagenin mallista kehittämä malli. Tässä mallissa keskeisenä tekijänä ratkaistaessa option arvoa on koti- ja ulkomaisiin velkakirjojen hintoihin sisältyvän epävarmuuden salliminen yhdessä valuuttakurssin stokastisuuden kanssa. Grabben malli lähtee siitä, että sekä koti- että ulkomainen korko ovat stokastisia. Ratkaisussa sovelletaan Mertonin (1973) stokastisen koron mallia.

Oletetaan, että valuuttakurssi ja velkakirjojen hinnat noudattavat seuraavia stokastisia prosesseja:

$$(4.1 \text{ a}) \quad dS_t/S_t = \mu_S(t)dt + \sigma_S(t)dz$$

$$(4.1 \text{ b}) \quad dP_f/P_f = \mu_{P_f}(t, T)dt + \sigma_{P_f}(t, T)dy$$

$$(4.1 \text{ c}) \quad dP_d/P_d = \mu_{P_d}(t, T)dt + \sigma_{P_d}(t, T)dx$$

jossa P_d ja P_f ovat koti- ja ulkomaisien velkakirjojen hinta hetkellä t , kun niiden maturiteetti ulottuu hetkeen T , ($\tau=T-t$), dz , dy ja dx ovat standardoituja Wiener-prosesseja.

Muodostetaan uudet muuttujat dG ja dw edellisten perusteella. $G(t, T)$ on ulkomaisen velkakirjan hinta kotimaan rahassa ja dw Wiener-prosessi. G :n dynamiikka on (4.2):

$$\begin{aligned} dG/G &= d(SP_f)/SP_f = (\mu_S + \mu_{P_f} + r_{SP_f}\sigma_S\sigma_{P_f})dt + \sigma_S dz + \sigma_{P_f} dy \\ &= \mu_G dt + \sigma_G dw \end{aligned}$$

Grabbe osoittaa, että on mahdollista muodostaa lokaalisesti riskitön portfolio (ei käytä varallisuutta eikä sisällä stokastisia komponentteja), joka koostuu koti- ja ulkomaisista joukkovelkakirjoista sekä

optioista. Tasapainotilanteessa portfolion tuotto on nolla. Eurooppalaisen option hinta saadaan ratkaistua seuraavasti:

$$(4.3) \quad c = S(t)P_f(t, T)N(d_1) - XP_d(t, T)N(d_2)$$

jossa

$$d_1 = \frac{\ln(SP_f/XP_d) + (\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$\sigma^2 = \int_0^{\tau} \frac{1}{\tau} [\sigma^2_G(t+\tau-u, u) + \sigma^2_{P_d}(t+\tau-u, u) - 2r_{GP_d}(t+\tau-u, u)\sigma_G\sigma_{P_d}] du$$

Soveltamalla termiinikurssin määritelmää

$$S(t)P_f(t, T) = F(t, T)P_d(t, T), \text{ saadaan (vrt.3.6)}$$

$$(4.4) \quad c = P_d(t, T) [F(t, T)N(d_1) - XN(d_2)]$$

jossa

$$d_1 = \frac{\ln(F/X) + (\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$\sigma^2 = \int_0^{\tau} \frac{1}{\tau} \sigma_F^2(t+\tau-u, u) du$$

jossa $\sigma_F^2(t, T)$ on hetkellinen varianssi termiinikurssin muutoksesta ($dF(t, T)/F$) laskettuna. Yhtälön (4.4) σ^2 on sama kuin σ^2 yhtälössä (4.3). Olennainen ero Garman-Kohlhagenin malliin tulee esiin siinä, että Grabben mallissa valuuttaoption hintaan vaikuttava volatilitiitti ei ole pelkästään valuuttakurssin muutoksesta aiheutuva vaan siihen vaikuttavat myös koti- ja ulkomaisten velkakirjojen hintojen ($\sigma^2_{P_d}$ ja σ^2_G) varianssit sekä niiden välinen korrelaatio (r_{GP_d}). Jos korot oletettaisiin

vakioiksi, päästäisiin yhtälöstä (4.4) täsmällisesti Garman - Kohlhagenin yhtälöön (3.7)⁵.

Osittaisderivaattojen etumerkkitarkasteltu tuottaa odotetun kaltaiset tulokset eli

$$c = f (S, P_d, P_f, X, \sigma, F, \tau)$$

+ - + - + + ?

Kuten G&K:n mallissa, option elinajan suhteen etumerkki jää määrittelemättömäksi. Amerikkalaisen call-option ollessa kyseessä Grabbe osoittaa, että sen arvo tietyin varauksin (positiivisilla koroilla) on suurempi kuin eurooppalaisen option. Riittävän korkealla valuuttakurssin arvolla suhteessa toteutushintaan, amerikkalainen optio tulee lunastetuksi ennen eräpäivää.

5. AMININ JA JARROWIN MALLI

5.1 Taustaa

Grabben mallin puutteena on, että sen oletukset eivät ollenkaan takaa sitä, että velkakirjan hinta konvergoi arvoon yksi erääntymishetkellä, jolloin negatiivinen termiinikorko tulee mahdolliseksi. Tämä on sinänsä yleinen ongelma, jos Black-Scholes mallia sovelletaan mekaanisesti velkakirjojen kurssista johdettaviin optioihin. (Ks. Berglund ja Gripenberg, 1989). Toinen puute mallissa on, että se ei ota huomioon korkoihin sisältyvää aikarakennetta. Kuitenkin tämän hetken korkorakenne antaa tietoa korkotason odotetuista muutoksista.

Keskeiseksi teemaksi valuuttaoptioiden hinnoittelussa onkin viimeaikaisessa keskustelussa noussut korkojen

⁵ Jos korot ovat vakioita, voidaan kirjoittaa $P_d = e^{-r_d T}$ ja $P_f = e^{-r_f T}$ ja sijoittamalla nämä

termiinikurssiyhtälöön, saadaan $F = S e^{(r_d - r_f) T}$ eli täsmällisest sama tulos kuin Garman-Kohlhagen-mallista.

aikarakenteen huomioon ottaminen optioiden hinnoittelussa. Ratkaisun sovellettuna eurooppalaisiin valuuttaoptioihin ovat esittäneet Amin ja Jarrow (1989). He käyttävät yleistä johdannaisvaateisiin luotua term structure-mallia (Heath, Jarrow ja Morton, 1988), joka pohjautuu Hon ja Leen (1986) esittämälle periaatteelle, että velkakirjojen hintadynamiikan pitäisi olla sellaista, että se ei salli arbitraasivoittojen syntymistä.

5.2 Kotimainen korkostruktuuri

Kun Grabben mallissa lähdettiin korkoinstrumenttien hinnoista, Aminin ja Jarrowin malli lähtee korkorakenteen dynamiikan mallittamisesta. Korkorakenne määritellään hetkellisen termiinikoron (f_d) kautta. Oletetaan, että kotimainen termiinikorko noudattaa seuraavaa stokastista differentiaaliyhtälöä:

$$(5.1) \quad df_d(t, T) = \alpha_d(t, T, w) dt + \sum_{i=1}^2 \sigma_{di}(t, T, f_d(t, T)) dW_i(t)$$

Ollennaista on, että kaksi samaa satunnaista shokkia ($dW_1(t)$, $dW_2(t)$) siirtävät kotimaista termiinikorkoa yli ajan. Termiinikoron reaktioherkkyyden shokkeihin kertovat σ_{d1} ja σ_{d2} . Shokit voidaan tulkita esimerkiksi lyhytaikaiseksi ja pitkäaikaiseksi tekijäksi, jotka vaikuttavat korkorakenteeseen.

Kotimaisen joukkovelkakirjalainan hintadynamiikka voidaan nyt ilmaista kotimaisen termiinikoron avulla, jolloin saadaan: (vrt. Grabben malli 4.1 b)

$$(5.2) \quad dP_d(t, T)/P_d = r_d(t) + b_d(t, T) + \sum_{i=1}^2 a_{di}(t, T) dW_i(t)$$

jossa

$$P_d(t, T) = \exp \left[- \int_t^T f_d(t, T) du \right]$$

$$r_d(t) = f_d(t, t) = \text{kotimainen hetkellinen riskitön korko}$$

ja

$$a_{di}(t, T) = - \int_t^T \sigma_{di}(t, u, f_d(t, u)) du, \quad i=1, 2$$

$$b_d(t, T) = - \int_t^T \alpha_d(t, u, w) du + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left[\int_t^T \sigma_{di}(t, u, f_d(t, u)) du \right]^2$$

a_{di} :n ja b_d :n määritelmät takaavat sen, että joukkovelkakirjan hinta konvergoi arvoon yksi erääntymishetkellä. Grabben mallin epärealistinen korkoinstrumenttien hintadynamiikka on saanut väistyä realistisemmän, mutta selvästi monimutkaisemman dynamiikan tieltä. Yhtälöstä (5.2) havaitaan, että joukkovelkakirjan hinnan dynamiikka riippuu stokastisista Brownin liikkeistä kumulatiivisen termiinikoron drift-tekijän kautta eikä sitä voida ilmaista pelkästään W_1 :n ja W_2 :n nykyisten arvojen funktiona kuten Grabben yhtälössä (4.1) tehdään.⁶

5.3 Ulkomainen korkostruktuuri

Analogisesti kotimaisen termiinikoron tapauksen kanssa oletetaan, että ulkomainen termiinikorko noudattaa stokastistista differentiaaliyhtälöä:

$$(5.3) \quad df_f(t, T) = \alpha_f(t, T, w) dt + \sum_{i=2}^3 \sigma_{fi}(t, T, f_f(t, T)) dW_i(t)$$

⁶Pitkäaikaisen sijoitusvaihtoehdon lisäksi Amin ja Jarrow tarvitsevat optioita hinnoittellessaan lyhytaikaisen rahamarkkinainstrumentin, jonka hinta määritellään seuraavasti:

$$B_d = \exp \left[\int_0^t r_d(u) du \right]$$

Tämä vastaa investointistrategiaa, jossa varat sijoitetaan koko ajan uudelleen riskittömällä korolla r_d . Option hintaa johtaessaan Amin ja Jarrow käyttävät suhteellisia hintoja, jotka ilmaistaan suhteessa B_d :hen.

Kuten edellä voidaan nyt johtaa lauseke ulkomaisen velkakirjan hinnan dynamiikalle $dP_f(t, T)$. Verrattaessa lauseketta (5.3) lausekkeeseen (5.2) käy ilmi, että kolmesta Brownin liikkeestä $W_i(t)$, $i=1,2,3$ ensimmäinen vaikuttaa vain kotimaiseen korkoon, toinen vaikuttaa sekä koti- että ulkomaiseen korkoon ja kolmas vaikuttaa ainoastaan ulkomaiseen korkoon. Yhteinen satunnaistekijä $W_2(t)$ tavoittaa maiden välisten korkojen keskenäisen korrelaation.⁷

5.4 Talouksien välinen linkki

Talouksien välinen linkki on valuutan spot-kurssi. Oletetaan, että se noudattaa seuraavaa stokastista differentiaaliyhtälöä:

$$(5.4) \quad dS(t)/S(t) = \mu(t)dt + \sum_{i=1}^4 \delta_{di}(t) dW_i(t)$$

Valuuttakurssin dynamiikka riippuu niistä kolmesta samasta Brownin liikkeestä, jotka vaikuttavat koti- ja ulkomaisiin termiinikorkoihin ($W_1(t)$, $W_2(t)$, $W_3(t)$). Tämä tuo korrelaation valuuttakurssien ja korkojen välillä mukaan analyysiin. Lisäksi valuuttakurssin dynamiikkaan annetaan vaikuttaa yhden riippumattoman satunnaishokin, ($W_4(t)$). Tämä tekijä ottaa huomioon muut kuin korkovaikutukset valuuttakursseihin.

5.5. Option hinnoittelu

Arbitraasivoittojen poissulkeminen ympäristössä, jossa otetaan huomioon korkojen stokastisuuden lisäksi korkojen aikarakenne, on vaativampi tehtävä kuin edellisissä malleissa. Aminin ja Jarrowin analyysi lähtee liikkeelle oletuksesta, että alkuperäinen termiinikorkokäyrä on annettu. Käyrä liikkuu satunnaisesti ja ajassa jatkuvana riippumattomien Brownin liikkeiden vaikutuksesta. Arbitraasi-voittojen poissulkeminen implikoi rajoituksia

⁷Amin ja Jarrow (1989) toteavat, että heidän mallinsa on helpolla yleistettävissä useamman korkotekijän tapaukselle.

terminikorkoprosessin drift-tekijöihin. Menetelmä takaa, että korkoprosessi ei johda negatiivisiin korkoihin ja poistaa siten varsin yleisen puutteen korkorakennemalleissa. Korkorakenne ei voi muuttua niin, että se mahdollistaisi korko-instrumenttien välistä arbitraasia. Se, että oletetaan alkutilanteessa korkorakenne eksogeeniseksi, merkitsee, että johdannaisvaateen hinnoittelu on itsessään riippumaton preferenssi-struktuurista ja riskin markkinahinnoista.

Lähestymistapaa, jossa lähtökohtakorkorakenne on annettu, Heath, Jarrow ja Morton nimittävät uudeksi metodologiaksi verrattuna aikaisempaan korkojen aikarakenteen standardilähestymistapaan, jossa korkorakenne määräytyy alusta alkaen mallin sisällä.⁸ (Vrt Cox, Ingersoll ja Ross, 1985).

Kun arbitraasivoittojen mahdollisuus on poissuljettu, eurooppalaisen osto-option hinta saadaan nyt ratkaistua seuraavasti:

$$(5.5) \quad c = S(t)P_f(t, T)N(d_1) - XP_d(t, T)N(d_2)$$

$$\text{jossa} \quad d_1 = \frac{\ln(SP_f/XP_d) + \sigma^2/2}{\sigma}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma$$

ja

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^4 \int_0^{\tau} [a_{fi}(v, \tau) + \delta_{di}(v) - a_{di}(v, \tau)]^2 dv}$$

a_{fi} = ulkomaisen terminikoron volatilitiiteetti

δ_{di} = valuuttakurssin volatilitiiteetti

a_{di} = kotimaisen terminikoron volatilitiiteetti

⁸ Heath, Jarrow ja Mortonin malli on yleistys Hon ja Leen (1986) mallille, jossa oletetaan kaikkia velkakirjojen hintoja ohjaavan saman binomiaaliprosessin, jolloin eri maturiteettien velkakirjojen tuotot ovat täydellisesti korreloituneita. Lisäksi HL:n malli sisältää vielä mahdollisuuden negatiivisiin korkoihin.

Yhtälön (5.5) mukaan eurooppalaisen valuuttaoption hinta riippuu koti- ja ulkomaisen velkakirjan hinnasta, valuuttakurssista ja option toteutushinnasta sekä option volatilititeetista, joka ei riipu pelkästään valuuttakurssin volatilititeetista vaan myös kotimaisten ja ulkomaisten termiinikorkojen volatilititeetista, johon sisältyy sekä erillinen että yhteinen osa.

Jos option hinta ilmaistaan valuutan termiinikurssin avulla⁹, nähdään, että yhtälössä (5.5) volatilititeetti (σ) on parametrisoitu versio Grabben yhtälön (4.4) volatilititeetista. Suurin etu Grabben malliin on, että tässä otetaan eksplisiittisesti huomioon koko korkorakenteen dynamiikka sekä koti- että ulkomaisella puolella. Aminin ja Jarrowin mukaan epävarmuuden erittelemisen eri osatekijöihin heidän mallin mukaisella tavalla saattaa poistaa joidenkin mallien kohdalla esiintyneen taipumuksen alihinnoitteluun markkinahintoihin verrattuna.

6. YHTEENVETO

Valuuttaoption hinnan määrittävä yksinkertainen perusmalli (Garman-Kohlhagen) pohjautuu oletukselle, että sekä koti- että ulkomainen korko ovat vakioita. Option hintaan vaikuttaa siten vain yksi stokastinen muuttuja, valuuttakurssi. Tässä ympäristössä option hinta saadaan ratkaistua soveltamalla Black-Scholes hinnoitteluyhtälöä johdettuna osinkoa tuottavalle vaateelle. Option hinnan taustalla oleva volatilititeetti on pelkästään valuuttakurssin muutoksesta aiheutuvaa.

Empiiriset tulokset, joita on saatu käyttämällä oletusta vakioisista koroista, eivät ole olleet kovinkaan lupaavia. Yhteinen piirre näille tuloksille on ollut se, että malleilla simuloidut hinnat pyrkivät alihinnoittelemaan

⁹ Option hinta voidaan määrittellä termiinikurssin avulla kuten edellä. Hinta saadaan, kun sijoitetaan yhtälöön (5.5) $F(t,T) = S(t)P_f(t,T)/P_d(t,T)$

optiot markkinahintoihin verrattuna.

Empiiristä evidenssiä Black-Scholes modifikaation tuottamasta harhasta valuuttaoptioiden hintoihin ovat esittäneet mm. Goodman, Ross ja Schmidt (1985), Shastri ja Tandon (1986) sekä Bodurtha ja Courtadon (1987).

Grabben sovellus tuo valuuttaoptioiden analyysiin mukaan korkojen epävarmuuden olettamalla koti- ja ulkomaisten velkakirjojen hintaprosessin noudattavan stokastista Brownin liikkettä valuuttakurssin ohella. Grabbe olettaa, että velkakirjan kurssit ovat ei-negatiivisia ja ovat arvossa yksi maturiteetti-hetkellä.

Kun option hinta ratkaistaan, saadaan tulokseksi, että option hinnan volatilititeettiin vaikuttavat koti- ja ulkomaisten korkojen varianssit ja niiden väliset kovarianssitermit valuuttakurssin varianssin ohella. Ratkaisu on sama kuin Black ja Sholes -mallissa, kun korkojen asemesta käytetään velkakirjan kurseja ja spot-valuuttakurssista laskettu varianssi korvataan termiinikurssin varianssilla, johon implisiittisesti sisältyvät edellä mainitut kovarianssit.

Grabben lähestymistavasta johdettua empiiristä mallia on testattu huomattavasti vähemmän kuin Garman - Kohlhagen mallia. Adams ja Wyatt (1987) testaavat tämän tyyppistä mallia käyttämällä Grabben mallin implikoimaa termiinikurssin volatilititeettia. Tulokset ovat harhattomampia kuin käyttämällä spot-kurssista laskettua volatilititeettia.

Grabben malli ei kuitenkaan vielä sisällä koti- ja ulkomaisten korkojen aikarakenteen huomioon ottamista eikä mallissa ole spesifioitu todellista rajoitusta kurssin päätyemisestä arvoonsa yksi eräpäivänä. Amin ja Jarrow osoittavat, että korkojen ja valuuttakurssin väliset relaatiot vaikuttavat korkorakenteen kautta option hinnan volatilititeettiin. Siten, kun Grabben mallissa kovarianssitermit perustuiivat ainoastaan tietyn

hetken riippuvuuksiin, Aminin ja Jarrowin mallissa koko korkorakenne vaikuttaa kovarianssitermeihin. Amin-Jarrow mallissa tarvitaan kuitenkin vähintään neljä-dimensiainen stokastinen prosessi kuvaamaan hintojen ja valuuttakurssin dynamiikkaa.

Käytännön sovellutusten kannalta Aminin ja Jarrowin selvästi realistisempi malli ei välttämättä ole kuitenkaan käyttökelpoisempi, sillä mallin edellyttämien parametrien estimointi on mutkikasta. Usean parametrin estimointi tuo myös lisää epätarkkuutta hinnoitteluun estimointivirheiden kautta.

Käytännössä optiohinnoittelumallien tärkeimpiä käyttötarkoituksia on, että likvidien markkinoiden optionoteerauksista lasketaan mallin avulla implisiittiset arvot mallin parametreille.¹⁰ Tämän jälkeen näitä implisiittisiä arvoja voi käyttää laskettaessa mallin avulla hintoja muille optioille. Näin taataan konsistentti hinnoittelu eri optioille.

On kuitenkin huomattava, että myös parametrien implisiittinen estimointi tuottaa vaikeuksia useamman parametrin tapauksessa. Haettaessa mahdollisimman oikeata parametriyhdistelmää syntyy väistämättä estimointivirheitä.

¹⁰Lähdetään havaitusta option hinnasta ja haetaan parametreille sellaiset arvot, että malli antaa havaitun arvon optiolle.

LÄHTEET

- Adams, P. and Wyatt, P. (1987): Biases in option prices: evidence from the foreign currency option market, Journal of Banking and Finance, 11, 549-562.
- Amin, K. and Jarrow, R. (1989): Pricing Foreign Currency Options under Stochastic Interest Rates, unpublished manuscript, Cornell University.
- Berglund, T. och Gripenberg, M. (1989): Prissättning av ränteoptioner, en översikt, Ekonomiska Samfundets Tidskrift, 2, 123-136.
- Biger, N. and Hull, J. (1983): The valuation of currency options, Financial Management, Spring, 24-28.
- Black, F. (1976): The pricing of commodity contracts, Journal of Financial Economics, 3, 167-179.
- Black, F. and Scholes, M. (1973): The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy, 81, 637-654.
- Bodurtha, J. and Courtadon, G. (1987): Tests of an American option pricing model on the foreign currency options market, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22, 153-167.
- Cox, J., Ingersoll, J., and Ross, S. (1985): A theory of the term structure of interest rates, Econometrica, 53, 385-407.
- Cox, J., Ross, S. and Rubinstein, M. (1979): Option pricing: A simplified approach, Journal of Financial Economics, 7, 229-264.
- Feiger, G. and Jacquillat, B. (1979): Currency option bonds, puts and calls on spot exchange and hedging of contingent foreign earnings, Journal of Finance, 34, 1129-1139.
- Garman, M. and Kohlhagen, S. (1983): Foreign currency option values, Journal of International Money and Finance, 2, 231-237.
- Giddy, I. (1983): Foreign exchange options, Journal of Futures Markets, 3, 143-166.
- Goodman, L., Ross, S., and Schmidt, F. (1985): Are foreign currency options overvalued? The early experience of the Philadelphia Stock Exchange, The Journal of Futures Markets, 5, 349-359.
- Grabbe, O. (1983): The pricing of call and put options on foreign exchange, Journal of Money and Finance, 2, 239-253.

- Heath, D., Jarrow, R., and Morton, A. (1988): Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology, Technical Report, Cornell University.
- Ho, T. and Lee, S. (1986): Term structure movements and Pricing interest rate contingent claims, The Journal of Finance, 41, 1011-1029.
- Merton, R. (1973): The theory of rational option pricing, Bell Journal of Economics and Management Science, 4, 141-183.
- Shastri, K. and Tandon, K. (1986): Valuation of foreign currency options: some empirical tests, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 21, 145-160.

LIITE

Valuuttaoptioiden hinnoittelumalleissa käytetyt symbolit:

t	=nykyinen aika
T	=option toteutusaika
τ	= $T-t$, option jäljellä oleva voimassaoloaika
$S(t)$	=valuutan spot-kurssi (kotimaan rahassa ilmaistuna)
$F(t,T)$	=valuutan termiinikurssi option eräpäivänä
X	=option toteutushinta
c	=eurooppalaisen valuuttaoption ostohinta
μ	=valuuttakurssin odotettu tuotto
σ	=valuuttaoption hintaan vaikuttava volatilitteetti
$r_d(t)$	=kotimainen hetkellinen riskitön korko
$r_f(t)$	=vastaava ulkomainen riskitön korko
$f_d(t,T)$	=Kotimainen termiinikorko hetkellä t kohdistuen hetkellä T tapahtuvaan lainaukseen
$f_f(t,T)$	=Vastaava ulkomainen termiinikorko
$P_d(t,T)$	=hetken t hinta kotimaiselle joukkovelkakirjalle, josta maksetaan yksi yksikkö kotimaan rahassa hetkellä T
$P_f(t,T)$	= Vastaava valuuttamääräinen hinta ulkomaiselle velkakirjalle
$B_d(t)$	= kotimaisen rahamarkkinainstrumentin hinta hetkellä t
$B_f(t)$	= vastaavan ulkomaisen instrumentin hinta
$W(t)$	= $W_1(t), W_2(t), W_3(t), W_4(t)$ neljä-dimensioinen standardoitu Brownin liike

ELINKEINOELÄMÄN TUTKIMUSLAITOS (ETLA)
THE RESEARCH INSTITUTE OF THE FINNISH ECONOMY
LÖNNROTINKATU 4 B, SF-00120 HELSINKI

Puh./Tel. (90) 601 322
Int. 358-0-601 322

Telefax (90) 601 753
Int. 358-0-601 753

KESKUSTELUAIHEITA - DISCUSSION PAPERS ISSN 0781-6847

- No 285 OLLE KRANTZ, Svensk ekonomisk förändring i ett långtids- perspektiv. 28.02.1989. 29 p.
- No 286 TOR ERIKSSON - ANTTI SUVANTO - PENTTI VARTIA, Wage Setting in Finland. 20.03.1989. 77 p.
- No 287 PEKKA ILMAKUNNAS, Tests of the Efficiency of Some Finnish Macro- economic Forecasts: An Analysis of Forecast Revisions. 30.03.1989. 19 p.
- No 288 PAAVO OKKO, Tuotantomuodon muutos ja sen merkitys yritys- ja aluerakenteelle. 08.05.1989. 14 s.
- No 289 ESKO TORSTI, The Forecasting System in ETLA. 10.05.1989. 36 p.
- No 290 ESKO TORSTI, MAT-ohjelmointitulkin käyttö ja rakenne. 11.05.1989. 67 s.
- No 291 GUJA BACCHILEGA - ROBERTO GOLINELLI, Medium Term Prospects for the European Economies. 17.05.1989. 27 p.
- No 292 KARI ALHO, Deregulation of Financial Markets: A General Equilibrium Analysis of Finland. 31.05.1989. 43 p.
- No 293 PAAVO OKKO - EERO KASANEN, A Model of Banking Competition. 15.06.1989. 20 p.
- No 294 HILKKA TAIMIO, Naisten kotityö ja taloudellinen kasvu Suomessa vuosina 1860-1985. 28.06.1989. 38 s.
- No 295 PETTERI HIRVONEN, Kysyntä-tarjonta -kehikon mukainen siirtofunktio malli bruttokansantuotteelle. 23.08.1989. 38 s.
- No 296 PAAVO OKKO, Suomen aluekehityksen ja aluepolitiikan nykyvaihe. 01.09.1989. 20 s.
- No 297 ANTTI RIPATTI - PENTTI VARTIA - PEKKA YLÄ-ANTTILA, Suomen talouden ja yritys rakenteen muutokset 1938-1988. 11.09.1989. 95 s.
- No 298 ROBERT HAGFORS, On Economic Welfare Equality as a Policy Goal and Social Transfers as Instruments. 11.09.1989. 20 p.

- No 299 SYNNÖVE VUORI - PEKKA YLÄ-ANTTILA, Joustava tuotantostrategia puu- ja huonekaluteollisuudessa. 27.09.1989. 60 s.
- No 300 SEVERI KEINÄLÄ, Finnish High-Tech Industries and European Integration; Sectoral Study 1: The Telecommunications Equipment Industry. 12.10.1989. 85 p.
- No 301 VESA KANNIAINEN, The Arch Model and the Capm: A Note. 30.10.1989. 10 p.
- No 302 VESA KANNIAINEN, Research Issues in Corporate Taxation. 30.10.1989. 10 p.
- No 303 TOM BERGLUND, Perceived and Measured Risk; An Empirical Analysis. 30.10.1989. 29 p.
- No 304 SEVERI KEINÄLÄ, Finnish High-Tech Industries and European Integration; Sectoral Study 2: The Data Processing Equipment Industry. 01.11.1989. 44 p.
- No 305 MASSIMO TAZZARI, Numeeriset yleisen tasapainon ulkomaankaupan mallit, teoria ja sovellutuksia. 02.11.1989. 64 s.
- No 306 JUKKA LASSILA, Preliminary Data in Economic Databases. 10.11.1989.
- No 307 SEVERI KEINÄLÄ, Finnish High-Tech Industries and European Integration; Sectoral Study 3: The Pharmaceutical Industry. 15.11.1989.
- No 308 T.R.G. BINGHAM, Recent Changes in Financial Markets: The Implications for Systemic Liquidity. 12.12.1989. 39 p.
- No 309 PEKKA ILMAKUNNAS, A Note on Forecast Evaluation and Correction. 27.12.1989. 13 p.
- No 310 PEKKA ILMAKUNNAS, Linking Firm Data to Macroeconomic Data: Some Theoretical and Econometric Considerations. 27.12.1989. 38 p.
- No 311 THOMAS WIESER, What Price Integration? Price Differentials in Europe: The Case of Finland. 27.12.1989. 30 p.
- No 312 TIMO MYLLYNTAUS, Education in the Making of Modern Finland. 22.02.1990. 36 p.
- No 313 JUSSI RAUMOLIN, The Transfer and Creation of Technology in the World Economy with Special Reference to the Mining and Forest Sectors. 23.02.1990. 34 p.
- No 314 TOM BERGLUND - LAURA VAJANNE, Korkeopävarmuus valuuttaoptioiden hinnoittelussa. 06.03.1990. 21 s.

Elinkeinoelämän Tutkimuslaitoksen julkaisemat "Keskusteluaiheet" ovat raportteja alustavista tutkimustuloksista ja väliraportteja tekeillä olevista tutkimuksista. Tässä sarjassa julkaistuja monisteita on rajoitetusti saatavissa ETLAn kirjastosta tai ao. tutkijalta. Papers in this series are reports on preliminary research results and on studies in progress; they can be obtained, on request, by the author's permission.

E:\sekal\DPjulk.chp/06.03.1990